



Corso di Idraulica

Prof. A. Balzano

CORRENTI IN PRESSIONE 1



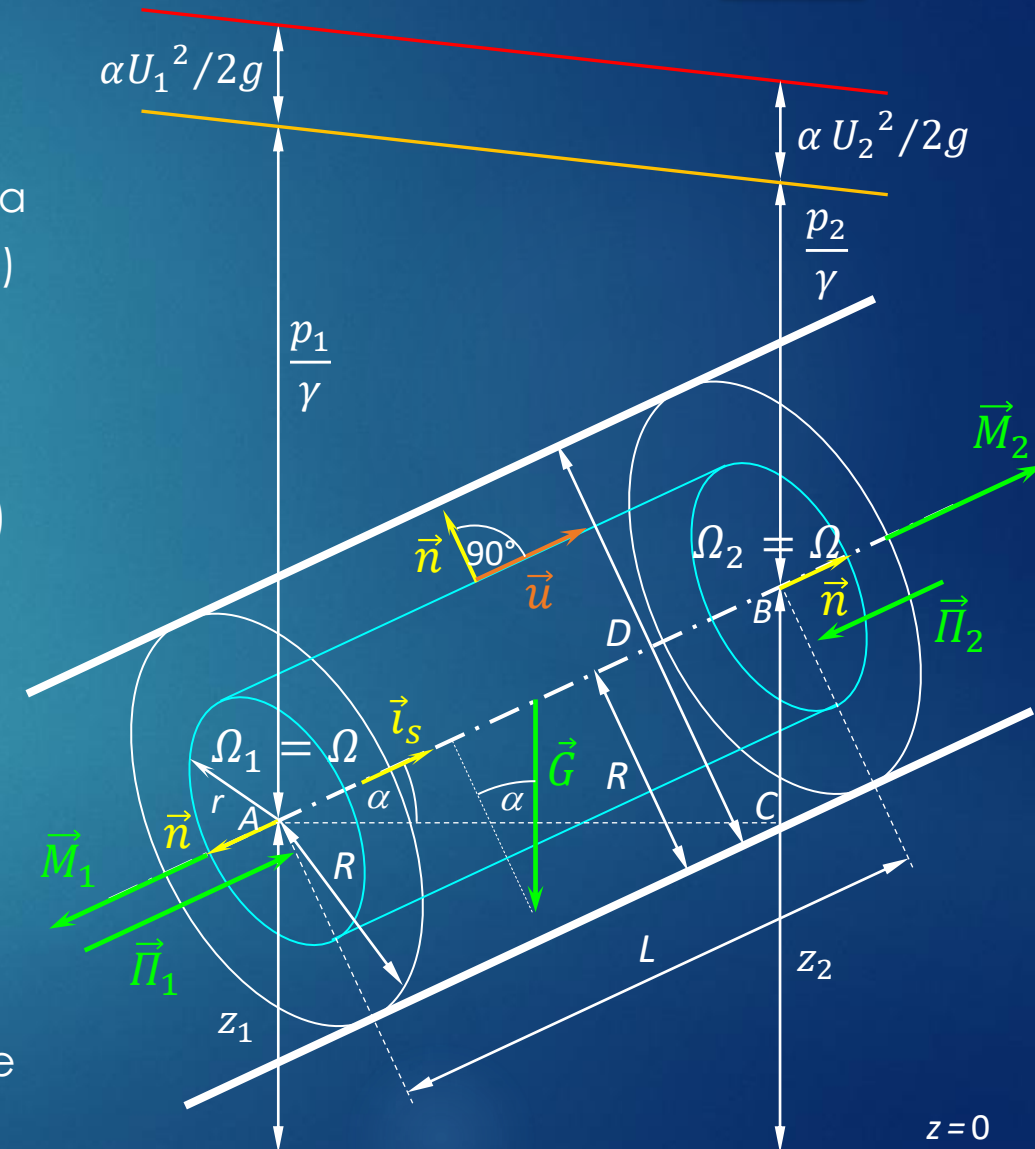
Correnti in pressione

► Correnti in pressione

- Correnti intubate, occupano l'intera sezione della condotta
 - ✓ denominazione richiama funzionamento normale ($p > 0$)
 - ✓ Le correnti intubate possono anche essere in depressione (situazione di norma non desiderata)
- Correnti in pressione usualmente costituite da:
 - Tratti di sviluppo prevalente in moto uniforme (in media) in condotte cilindriche a sezione circolare
 - ✓ perdite di carico distribuite
 - Brevi tratti di corrente non lineare
 - ✓ perdite di carico localizzate

► Moto uniforme nelle correnti in pressione

- Flusso in condotta cilindrica a sezione circolare
- Fluido incompressibile, isoterma e omogeneo ($\rho = \text{cost}$)
 - ✓ si omettono simboli media di insieme e media su sezione



Analisi del moto uniforme

► Equazione globale del moto

- Volume di controllo: volume cilindrico coassiale alla condotta, sezione circolare di raggio r e sviluppo in asse L
 - ✓ si sfrutta simmetria cilindrica distribuzione di velocità
- Equazione globale per fluido viscoso (moto medio)

$$\vec{I} + \vec{M} = \vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_R$$

$$- \vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV$$

$$- \vec{\Pi}_p = \int_{S_c} -p \vec{n} dS$$

$$- \vec{M} = \int_{S_c} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS$$

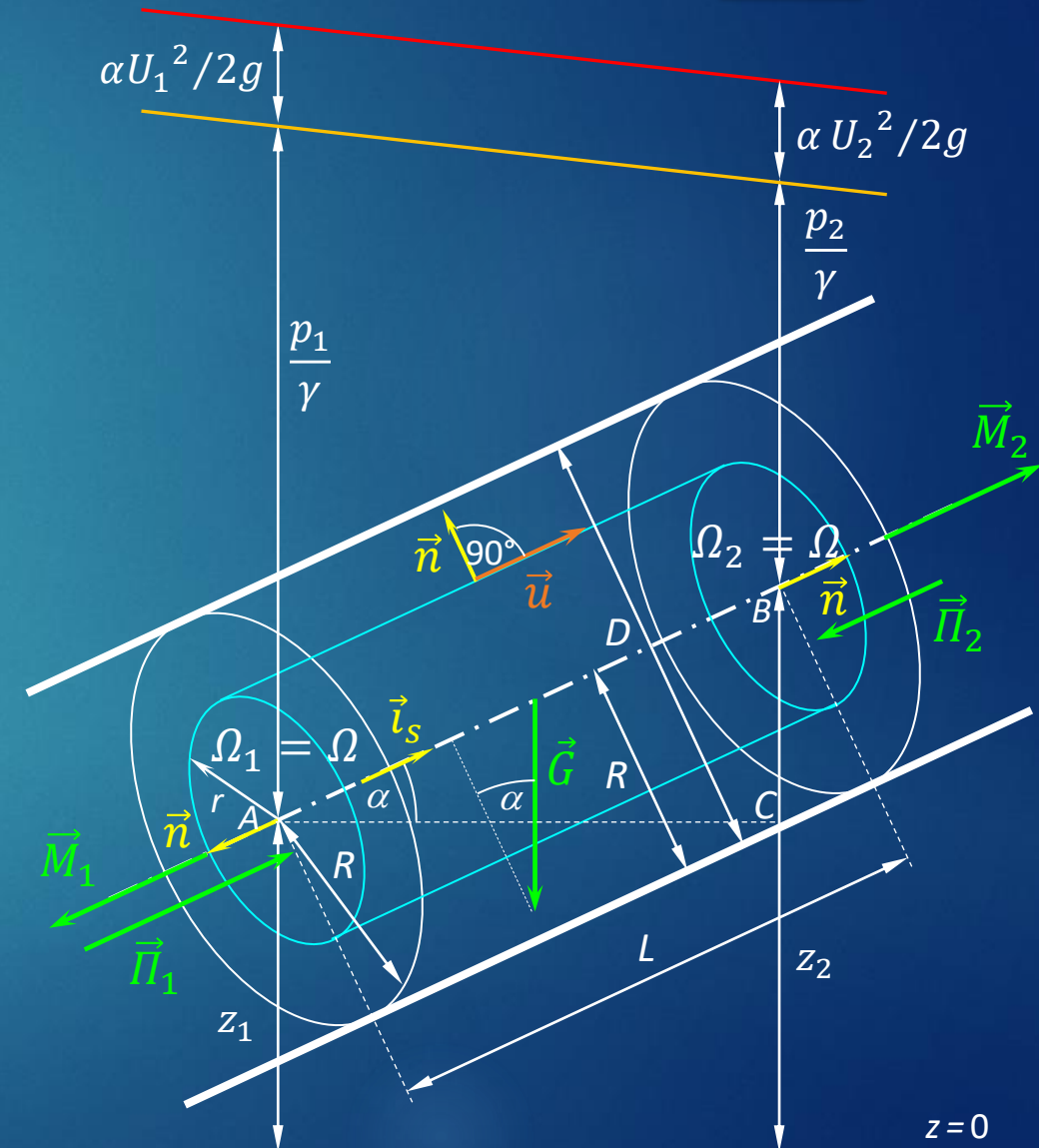
$$- \vec{\Pi}_\mu = \mu \int_{S_c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS$$

$$- \vec{G} = \int_{V_m} \rho \vec{f}_m dV$$

$$- \vec{\Pi}_R = - \int_{S_c} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} dS$$

✓ In integrali di superficie $S_c = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S_L$

✓ $\vec{u} = u \vec{i}_s$ velocità medie parallele all'asse, $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$



Analisi del moto uniforme

► Proiezione equazione globale del moto su asse

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_R) \cdot \vec{i}_s$$

– \vec{i}_s versore della direzione orientata asse corrente

- $\vec{I} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \vec{u} dV = 0$ per moto stazionario (in media)

- $\vec{M} = \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega + \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega + \int_{S_L} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$

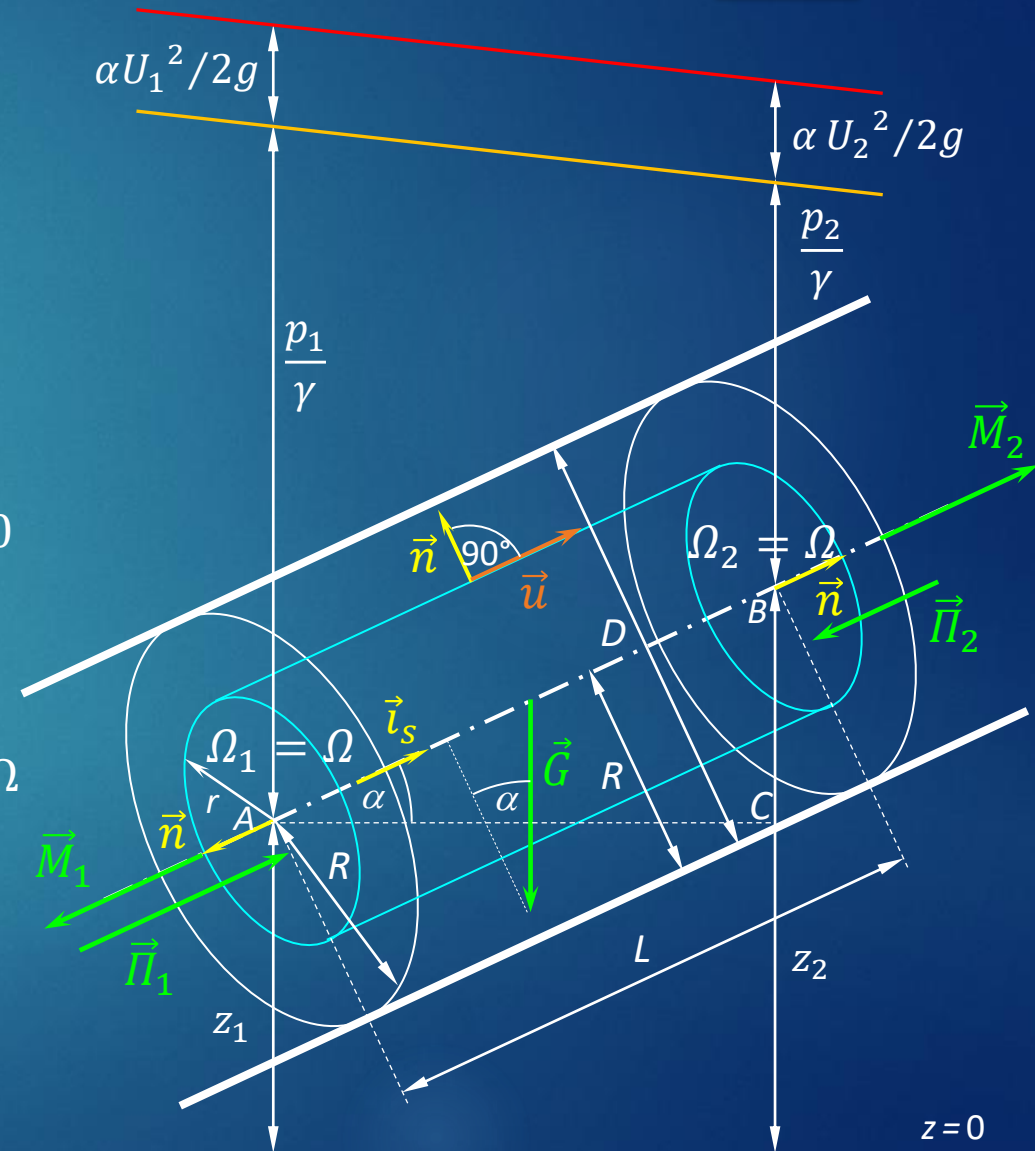
- $\int_{\Omega_1} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega = - \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} u d\Omega$

- $\int_{\Omega_2} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} d\Omega = \int_{\Omega_2} \rho \vec{u} u d\Omega$ si elide con $- \int_{\Omega_1} \rho \vec{u} u d\Omega$

- $\int_{S_L} \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \vec{n} dS = 0$ perché $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ su S_L

- $\vec{G} \cdot \vec{i}_s = G_s = -\gamma V \sin \alpha = -\gamma \Omega L \sin \alpha = -\gamma \Omega (z_2 - z_1)$

✓ α è l'angolo che l'asse forma con l'orizzontale



Analisi del moto uniforme

► Proiezione equazione globale del moto su asse

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_R) \cdot \vec{i}_s$$

– \vec{i}_s versore della direzione orientata asse corrente

$$\bullet \vec{\Pi}_p \cdot \vec{i}_s = \left(\int_{\Omega_1} -p \vec{n} d\Omega + \int_{\Omega_2} -p \vec{n} d\Omega + \int_{S_L} -p \vec{n} dS \right) \cdot \vec{i}_s$$

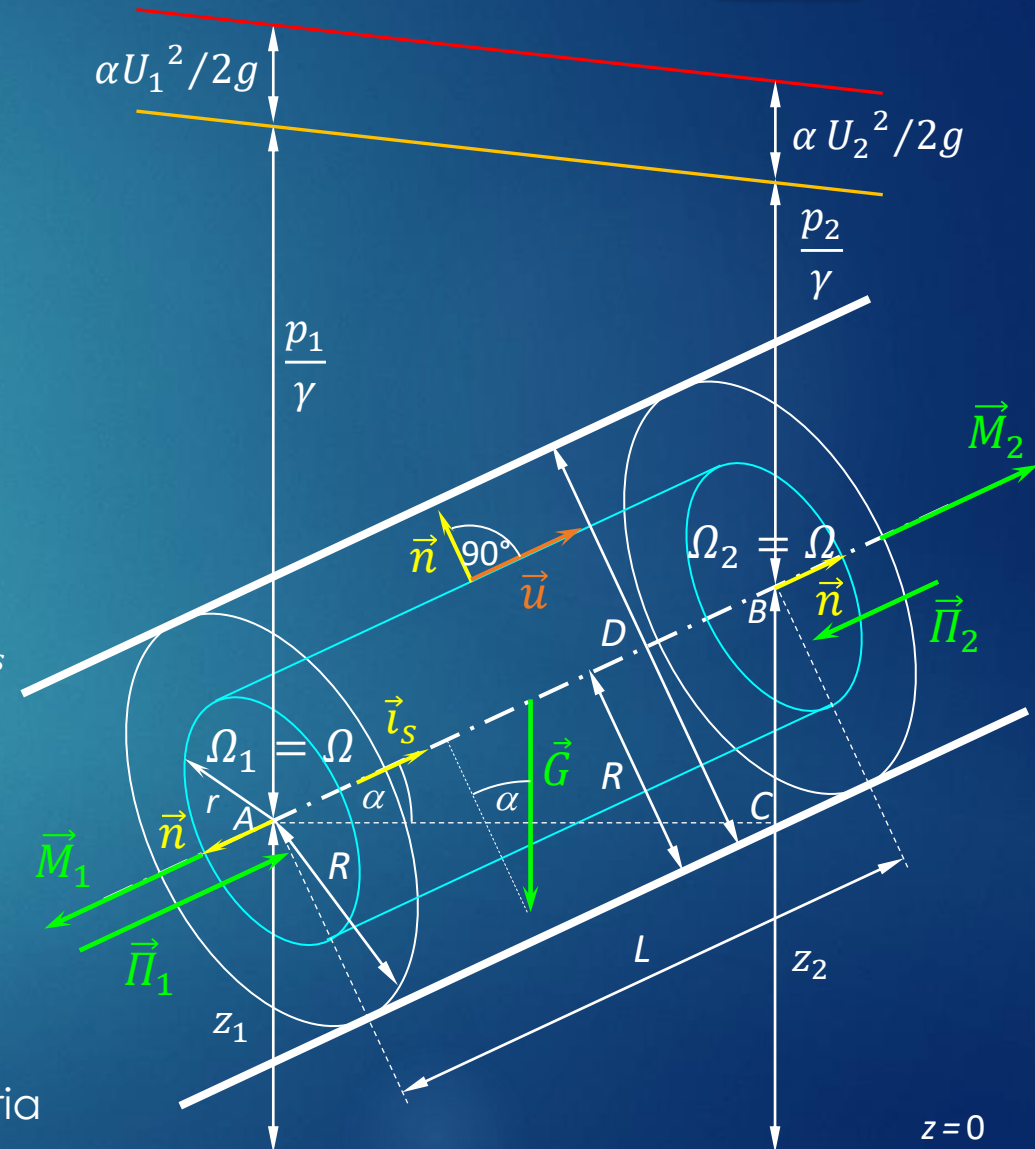
– $\vec{i}_s \cdot \int_{S_L} -p \vec{n} dS = 0$ forze di pressione normali all'asse

$$\begin{aligned} - \left(\int_{\Omega_1} -p \vec{n} d\Omega + \int_{\Omega_2} -p \vec{n} d\Omega \right) \cdot \vec{i}_s &= (-p_{G1} \vec{n}_1 \Omega_1 - p_{G2} \vec{n}_2 \Omega_2) \cdot \vec{i}_s \\ &= (p_{G1} \vec{i}_s \Omega - p_{G2} \vec{i}_s \Omega) \cdot \vec{i}_s = p_{G1} \Omega - p_{G2} \Omega \end{aligned}$$

$$\bullet \vec{\Pi}_\mu \cdot \vec{i}_s = \left(\mu \int_{\Omega_1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} d\Omega + \mu \int_{\Omega_2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} d\Omega + \mu \int_{S_c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS \right) \cdot \vec{i}_s$$

$$- \mu \int_{\Omega_1} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} d\Omega = \mu \int_{\Omega_2} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} d\Omega = 0 \text{ perché } \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = \pm \frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = 0$$

$$- \left(\mu \int_{S_L} \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS \right) \cdot \vec{i}_s = \mu \int_{S_L} \frac{\partial u}{\partial r} dS = \mu \frac{\partial u}{\partial r} 2\pi r L \text{ per simmetria}$$





Analisi del moto uniforme

- Proiezione equazione globale del moto su asse

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_R) \cdot \vec{i}_s$$

- \vec{i}_s versore della direzione orientata asse corrente

$$\vec{\Pi}_R \cdot \vec{i}_s = \left(-\int_{\Omega_1} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} \, d\Omega - \int_{\Omega_2} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} \, d\Omega - \int_{S_L} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} \, dS \right) \cdot \vec{i}_s$$

$$- \int_{\Omega_1} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} \, d\Omega - \int_{\Omega_2} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} \, d\Omega =$$

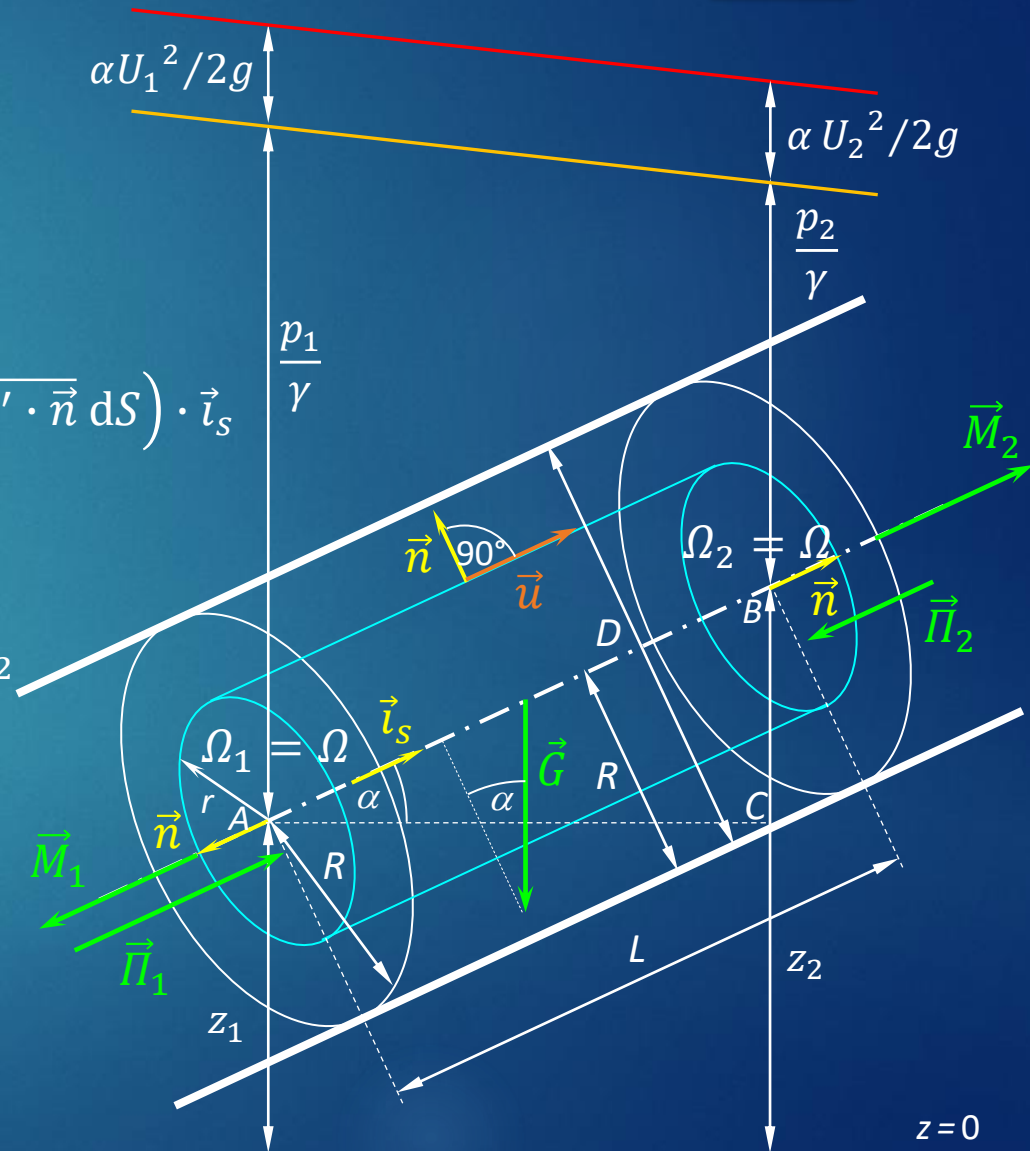
$$= \int_{\Omega_1} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \, d\Omega - \int_{\Omega_1} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \, d\Omega = 0 \quad \text{perché } \vec{n}_1 = -\vec{n}_2$$

$$- \left(- \int_{S_L} \rho \overline{\vec{u}' \vec{u}'} \cdot \vec{n} \, dS \right) \cdot \vec{i}_s = - \int_{S_L} \rho \overline{u' u'_n} \, dS = - \rho \overline{u' u'_n} 2\pi r L$$

- Riordinando si ottiene

$$0 = -\gamma \Omega (z_2 - z_1) + (p_{G_1} - p_{G_2}) \Omega + \mu \frac{\partial u}{\partial r} BL - \rho \overline{u' u'_n} BL$$

- $B = 2\pi r$ contorno bagnato





Analisi del moto uniforme

- Proiezione equazione globale del moto su asse

$$(\vec{I} + \vec{M}) \cdot \vec{i}_s = (\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_\mu + \vec{\Pi}_R) \cdot \vec{i}_s$$

– \vec{i}_s versore della direzione orientata asse corrente

- Riordinando si ottiene

$$0 = -\gamma \Omega (z_2 - z_1) + (p_{G1} - p_{G2}) \Omega + \mu \frac{\partial u}{\partial r} BL - \rho \overline{u'u'_r} BL$$

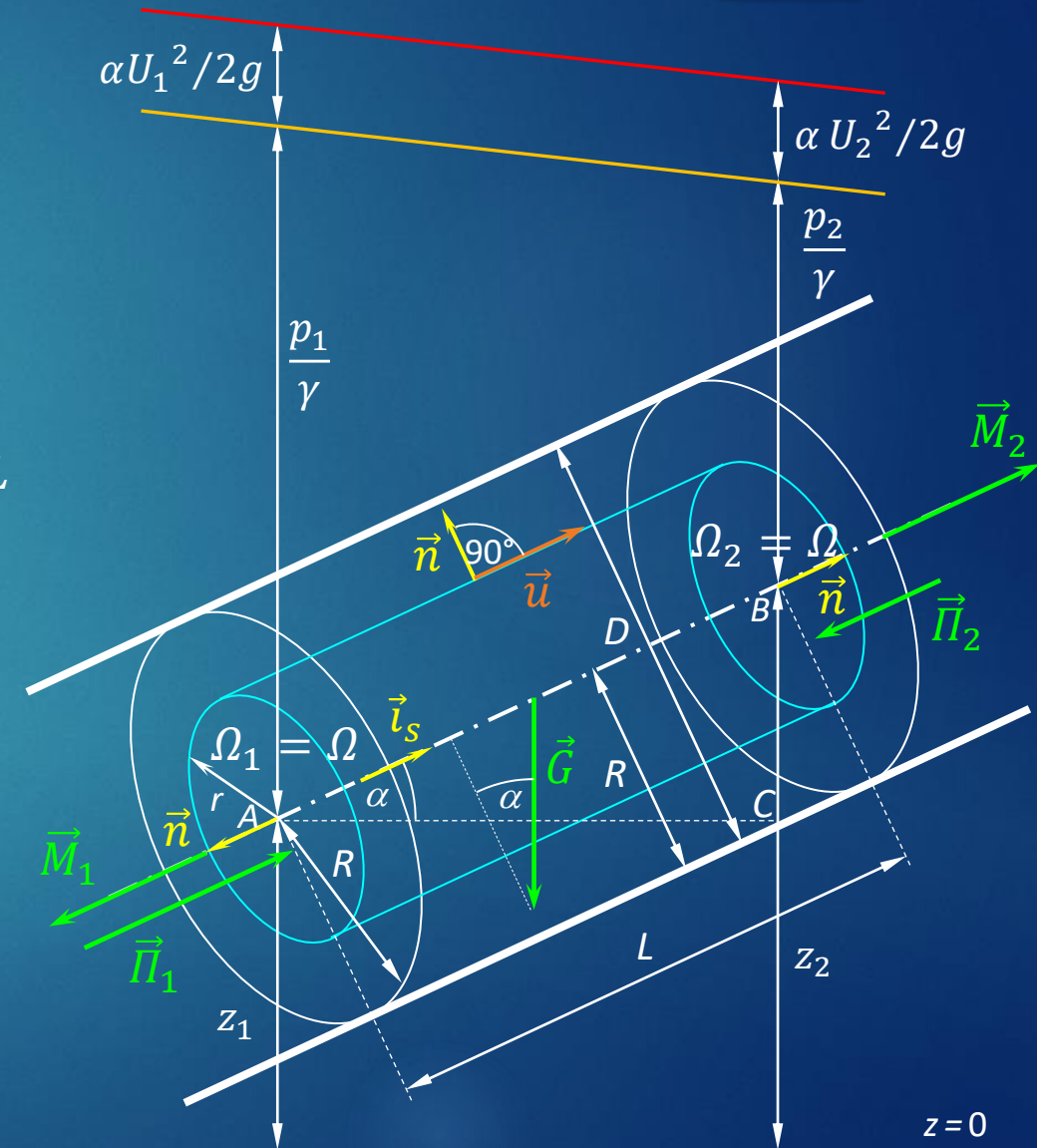
- Dividendo membro a membro per $\gamma \Omega$

$$z_1 - z_2 + \frac{p_{G1}}{\gamma} - \frac{p_{G2}}{\gamma} + \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{B}{\Omega} L - \frac{\rho}{\gamma} \overline{u'u'_r} \frac{B}{\Omega} L = 0$$

- Posto $\Re = \Omega/B$ (raggio idraulico) e dividendo per L

$$\frac{h_1 - h_2}{L} + \frac{1}{\gamma \Re} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u'u'_r} \right) = 0$$

- ✓ Per sezione circolare $\Re = \frac{\Omega}{B} = \frac{\pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}$





Analisi del moto uniforme

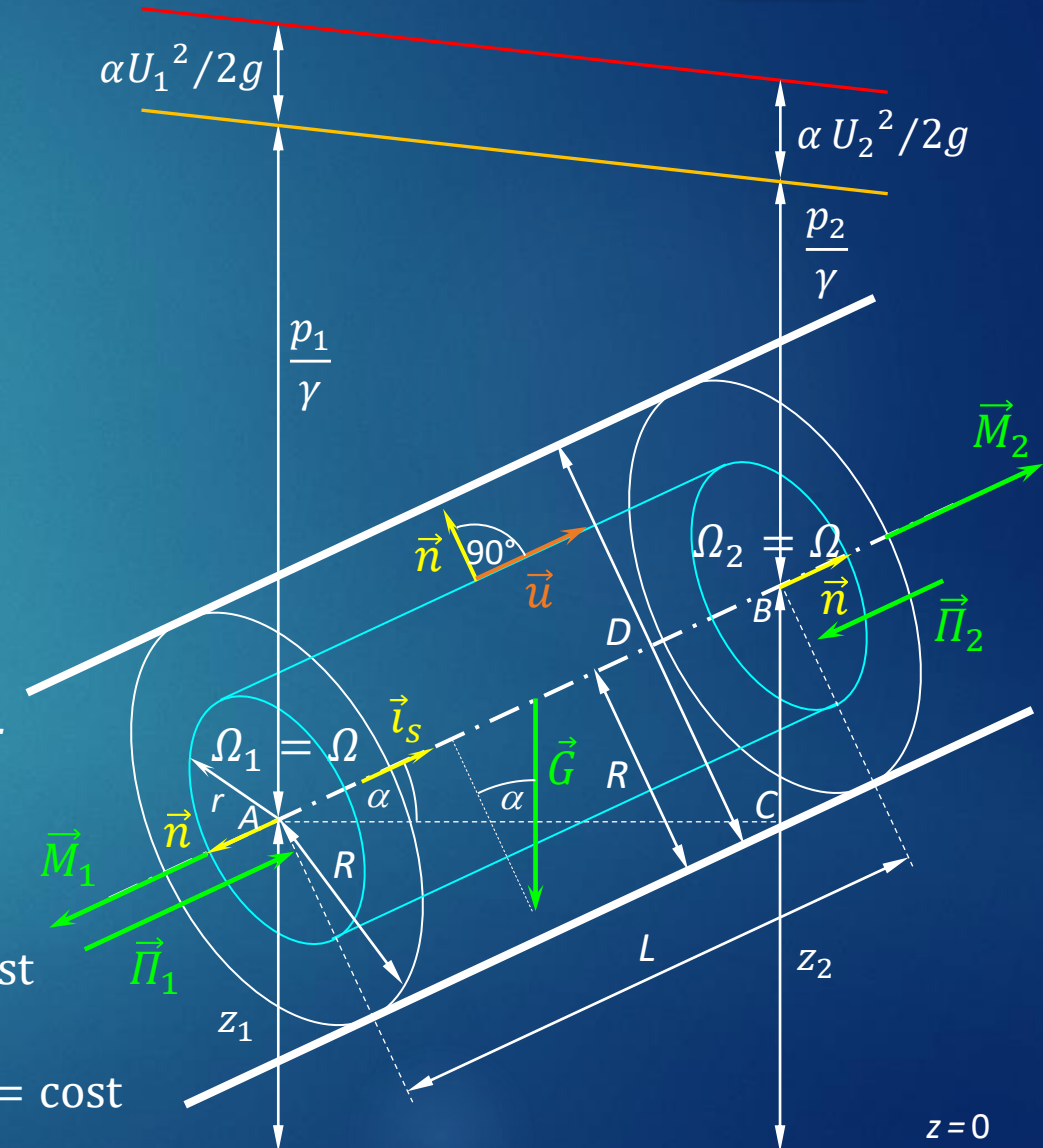
► Sforzi viscosi, sforzi turbolenti e sforzi totali

$$\frac{h_1 - h_2}{L} + \frac{1}{\gamma \mathfrak{R}} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u' u'_r} \right) = 0$$

- $\mu \frac{\partial u}{\partial r} < 0$ sforzi viscosi resistenti
- $-\rho \overline{u' u'_r} < 0$ sforzi turbolenti resistenti
- $\tau_{tot} = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \rho \overline{u' u'_r}$ modulo degli sforzi totali

► Cadente piezometrica e cadente dei carichi totali

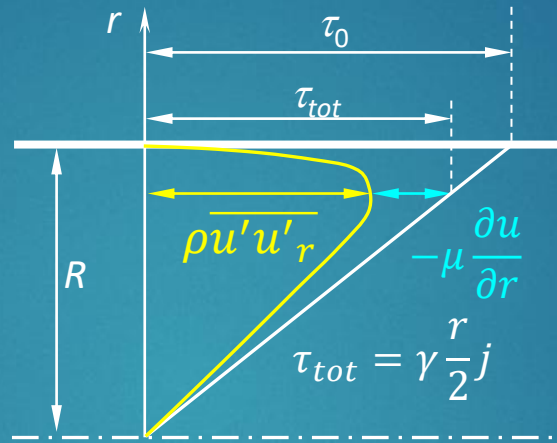
- $h = \text{cost}$ su sezione regolare \longrightarrow indipendente da r
- $i = -\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{h_1 - h_2}{L} = \frac{\tau_{tot}}{\gamma \mathfrak{R}} > 0$
- $j = -\frac{\partial H}{\partial s} = i = \frac{\tau_{tot}}{\gamma \mathfrak{R}}$ nel moto uniforme perché $\frac{U^2}{2g} = \text{cost}$
- $j = i = \text{cost}$ al variare di L perché $\frac{1}{\gamma \mathfrak{R}} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u' u'_r} \right) = \text{cost}$



Analisi del moto uniforme

► Sforzi viscosi e sforzi turbolenti

- $j = \frac{\tau_{tot}}{\gamma \mathfrak{R}} \longrightarrow \tau_{tot} = \gamma \mathfrak{R} j = \gamma \frac{r}{2} j$
- $\tau_0 = \gamma \frac{R}{2} j$ alla parete, $R = \frac{D}{2}$
- $\tau_{tot} = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \overline{\rho u' u'_r}$
- Sforzi viscosi $-\mu \frac{\partial u}{\partial r}$
 - nulli sull'asse (per simmetria)
 - crescenti dall'asse verso la parete
 - unici sforzi nel sottostrato viscoso
 - massimi alla parete = τ_0
- Sforzi turbolenti $\overline{\rho u' u'_r}$
 - nulli sull'asse (per simmetria)
 - massimo relativo vicino a parete
 - nulli nel sottostrato viscoso

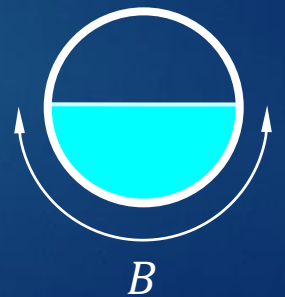


► Azione di trascinamento

- τ_0 sforzo alla parete (da parete su fluido e viceversa, azione e reazione)
 - Forza resistente su tratto sviluppo L (= azione di trascinamento su condotta)
- $$T = \tau_0 B L = \gamma \mathfrak{R} j B L = \gamma \Omega L j = \gamma V j$$
- $j = T / \gamma V$ az. trasc. per unità di peso

► Rilevanza del raggio idraulico

- Forze motrici $\propto \Omega$ (forza peso, forze di pressione)
- $$-\gamma \Omega (z_2 - z_1) + (p_{G1} - p_{G2}) \Omega$$
- Forze resistenti $\propto B$ (sforzi viscosi e sforzi turbolenti)
- $$\mu \frac{\partial u}{\partial r} B L - \overline{\rho u' u'_r} B L$$
- $\mathfrak{R} = \Omega / B$ rapporto di grandezze geometriche caratteristiche
 - ✓ In generale, attraverso B vengono trasmessi sforzi resistenti



Profilo di velocità

► Equazione differenziale del profilo

$$j + \frac{2}{\gamma r} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \rho \overline{u' u'_r} \right) = 0$$

- Regime laminare ($\overline{u' u'_r} = 0$)

$$j + \frac{2\mu}{\gamma r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \implies du = -\frac{\gamma j}{2\mu} r dr$$

- integrale generale: $u = -\frac{\gamma j}{4\mu} r^2 + C$

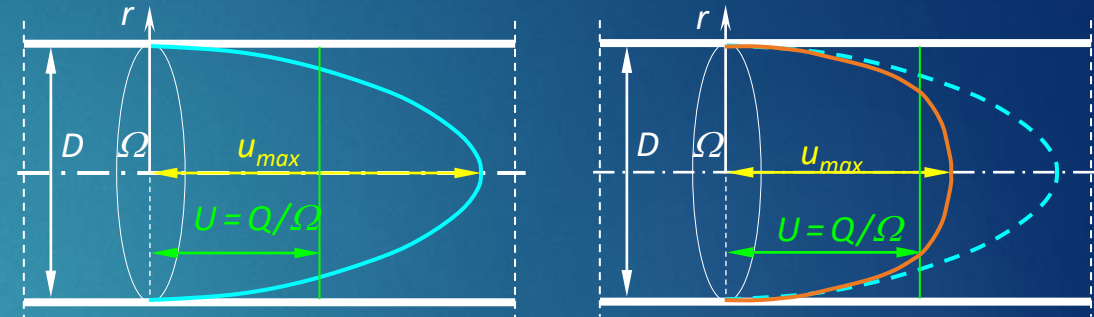
- c. al contorno: $u = 0$ per $r = D/2$

$$0 = -\frac{\gamma j}{16\mu} D^2 + C \implies C = \frac{\gamma j}{16\mu} D^2$$

- profilo di velocità: $u = \frac{\gamma j}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)$

- ✓ solido di velocità è paraboloidale di rotazione

- sull'asse $u = u_{max} = \frac{\gamma j}{16\mu} D^2$



- Portata: $Q = \int_{\Omega} u d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\gamma j}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) 2\pi r dr =$

$$\left[\frac{\gamma j \pi}{2\mu} \left(\frac{D^2}{8} r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \right]_0^{D/2} = \frac{\gamma j \pi}{128\mu} D^4$$

- Velocità media: $U = \frac{Q}{\Omega} = \frac{\gamma j \pi}{128\mu} D^4 \frac{4}{\pi D^2} = \frac{\gamma j}{32\mu} D^2 = \frac{1}{2} u_{max}$

- Espressione della cadente: $j = \frac{32\mu U}{\gamma D^2} = 64 \frac{\nu}{UD} \frac{U^2}{2gD} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{U^2}{2gD}$

- Regime turbolento ($\overline{u' u'_r} > 0$, per il resto non noto)
 - si dimostra che il profilo di velocità si ottiene dal profilo di moto laminare sottraendovi una quantità crescente dalla parete verso l'asse, legata agli sforzi turbolenti



Legge logaritmica di parete

- Strato limite: zona prossima a parete nella quale gli sforzi tangenziali non sono trascurabili

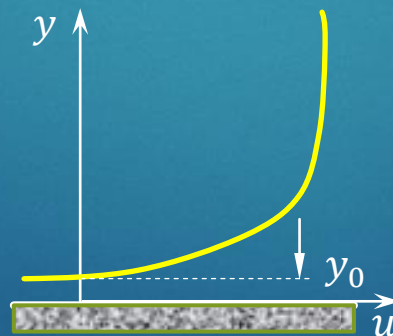
- strato limite laminare: regime laminare
- strato limite turbolento: regime turbolento
 - ✓ lontano da pareti moto irrotazionale

- Strato limite turbolento

- Sottostrato viscoso: soltanto $\mu \frac{\partial u}{\partial y} \approx \tau_0$
- Strato di equilibrio: $\mu \frac{\partial u}{\partial y} \approx -\rho \overline{u'u'_n}$
- Nucleo turbolento: $\rho \overline{u'u'_n} \gg -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$

- Sottostrato viscoso (u lineare: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y}$)

- $\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{u}{y} \longrightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{u}{y} = u^{*2}$
- $\frac{u}{u^*} = \frac{yu^*}{\nu} = \text{Re}^*$ valida per $\frac{yu^*}{\nu} < 5$



- Teoria della lunghezza di mescolamento

- $u', u'_n \propto \ell \frac{\partial u}{\partial y}$ ℓ = lunghezza di mescolamento

- $\rho \overline{u'u'_n} \propto \rho \ell^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$

- $\ell \propto y \longrightarrow \rho \overline{u'u'_n} = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$

- ✓ $\kappa = 0,4$ costante di Von Kármán

- Strato di equilibrio: $-\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \tau_0 = \rho \overline{u'u'_n}$

$$-\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \longrightarrow \kappa y \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt{\tau_0 / \rho} = u^*$$

- ✓ u^* velocità di attrito

$$-\frac{du}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{dy}{y} \longrightarrow \frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) ; u = 0 \text{ per } y = y_0$$

- ✓ valida per $\frac{yu^*}{\nu} > 30$



Leggi di resistenza al moto uniforme

► Formula di Darcy-Weisbach

$$j = \lambda \frac{U^2}{2gD} \quad (\text{sezione circolare})$$

- λ *coefficiente di resistenza, numero indice di resistenza, coefficiente di perdita distribuita, fattore d'attrito (friction factor)*

✓ Trattasi di attrito interno al fluido, non fra fluido e parete, alla quale il fluido aderisce

- Sezione di forma qualunque

$$j = \lambda \frac{U^2}{8g\Re} \quad (\Re = D/4 \text{ per sezione circolare})$$

- Regime laminare ($Re < 2000 \div 2300$)

- λ ottenibile su base deduttiva

$$j = \frac{32\mu U}{\gamma D^2} = \frac{64}{Re} \frac{U^2}{2gD}$$



$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

- Regime turbolento ($Re > 4000$)

- Necessità di determinazione su base sperimentale
- ✓ Sforzi turbolenti non ottenibili per via deduttiva
- Analisi dimensionale: ricerca relazione fra grandezze

- Sforzo resistente alla parete, τ_0
- Velocità media della corrente, U
- Diametro della tubazione, D
- Densità del fluido, ρ
- Viscosità dinamica del fluido, μ
- Lunghezza caratteristica rappresentativa della rugosità della parete: scabrezza, σ

$$\text{► } F(\tau_0, U, D, \rho, \mu, \sigma) = 0 \quad (6 \text{ grandezze})$$

equivale a relazione fra $6-3=3$ numeri indice

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2}, \frac{\rho U D}{\mu}, \frac{\sigma}{D}$$



Leggi di resistenza al moto uniforme

► Formula di Darcy-Weisbach

$$j = \lambda \frac{U^2}{2gD} \quad (\text{sezione circolare})$$

- Regime turbolento: ricerca della relazione

$$f\left(\frac{\tau_0}{\rho U^2}, \frac{\rho U D}{\mu}, \frac{\sigma}{D}\right) = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\tau_0}{\rho U^2} = \varphi\left(\frac{\rho U D}{\mu}, \frac{\sigma}{D}\right)$$

- $\text{Re} = \frac{\rho U D}{\mu}$ numero di Reynolds

- $\frac{\sigma}{D}$ scabrezza *relativa*

- $\frac{\tau_0}{\rho U^2} = \frac{\gamma R j}{\rho U^2} = \frac{\gamma D}{4\rho U^2} \lambda \frac{U^2}{2gD} = \frac{\lambda}{8}$

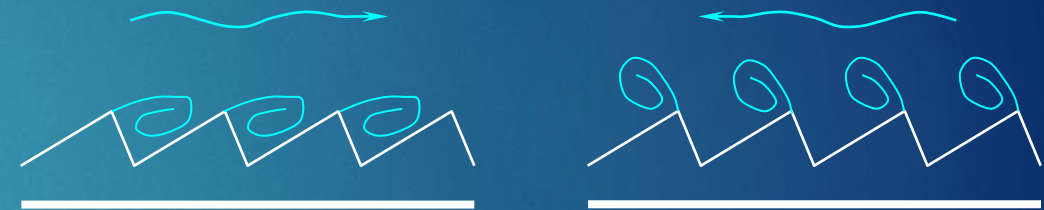
- La relazione cercata è quindi del tipo

$$\lambda = \lambda\left(\text{Re}, \frac{\sigma}{D}\right)$$

- ✓ da determinare per via sperimentale

- Come dare un valore alla scabrezza σ ?

- Non determinabile per via puramente geometrica



- ✓ Una stessa scabrezza produce resistenze al moto diverse a seconda del verso della corrente

- ✓ Tubazioni commerciali hanno rugosità irregolare

- Necessità di definizione della scabrezza sulla base degli effetti sul moto

► Prime prove sperimentali (Prandtl – Nikuradse)

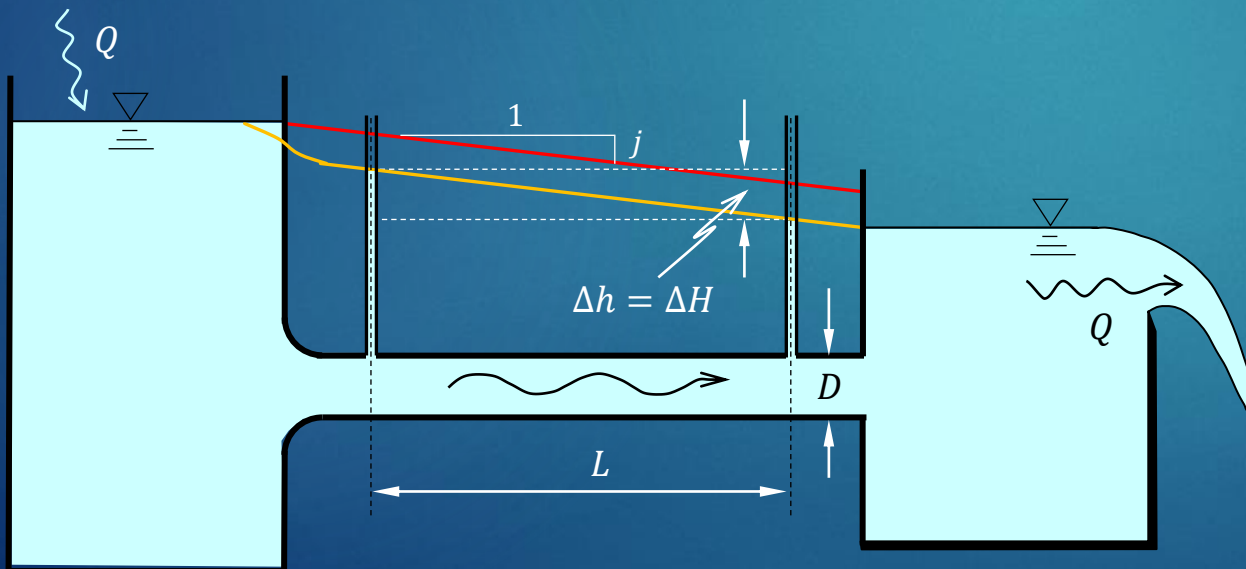
- Prove con scabrezza omogenea

- Tubazioni rivestite internamente di sabbia di diametro d estremamente regolare: $\sigma = d$

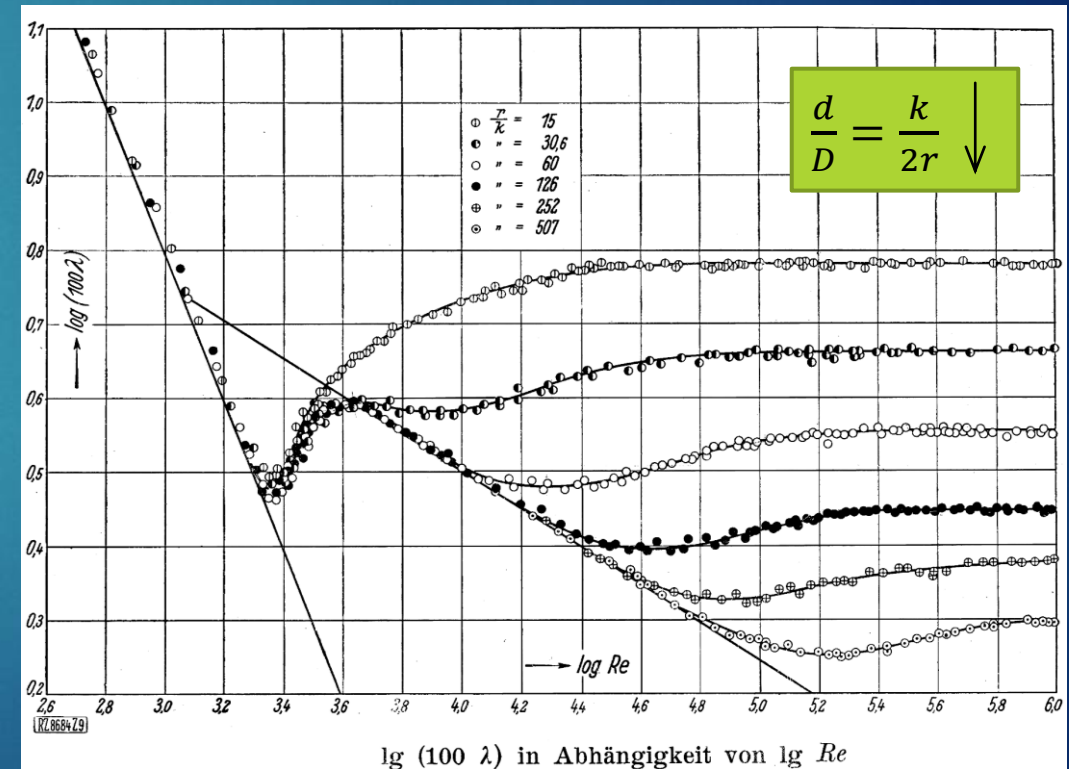
Leggi di resistenza al moto uniforme

► Esperienze di Prandtl – Nikuradse (1933)

- Prove con scabrezza omogenea: $\sigma = d$
 - ✓ d diametro grano di sabbia
- Apparato sperimentale con d, D, L noti
- Misura di portata $Q = U\Omega$ (stramazzo)
- $\frac{\Delta h}{L} = \frac{\Delta H}{L} = j = \lambda \frac{U^2}{2gD} \longrightarrow \lambda = \frac{j 2gD}{U^2}$



- ✓ Risultati sperimentali rappresentati nel diagramma (o arpa) di Nikuradse (bilogaritmico)





Leggi di resistenza al moto uniforme

► Esperienze di Prandtl – Nikuradse (1933)

- Prove con scabrezza omogenea: $\sigma = d$
 - ✓ d diametro grano di sabbia
- Risultati sperimentali rappresentati nel diagramma (o arpa) di Nikuradse (bilogaritmico)
 - $Re < 2000-2300$: regime laminare $\lambda = 64/Re$
 - $Re > 4000$: regime turbolento

- Regime di tubo fluidodinamicamente liscio

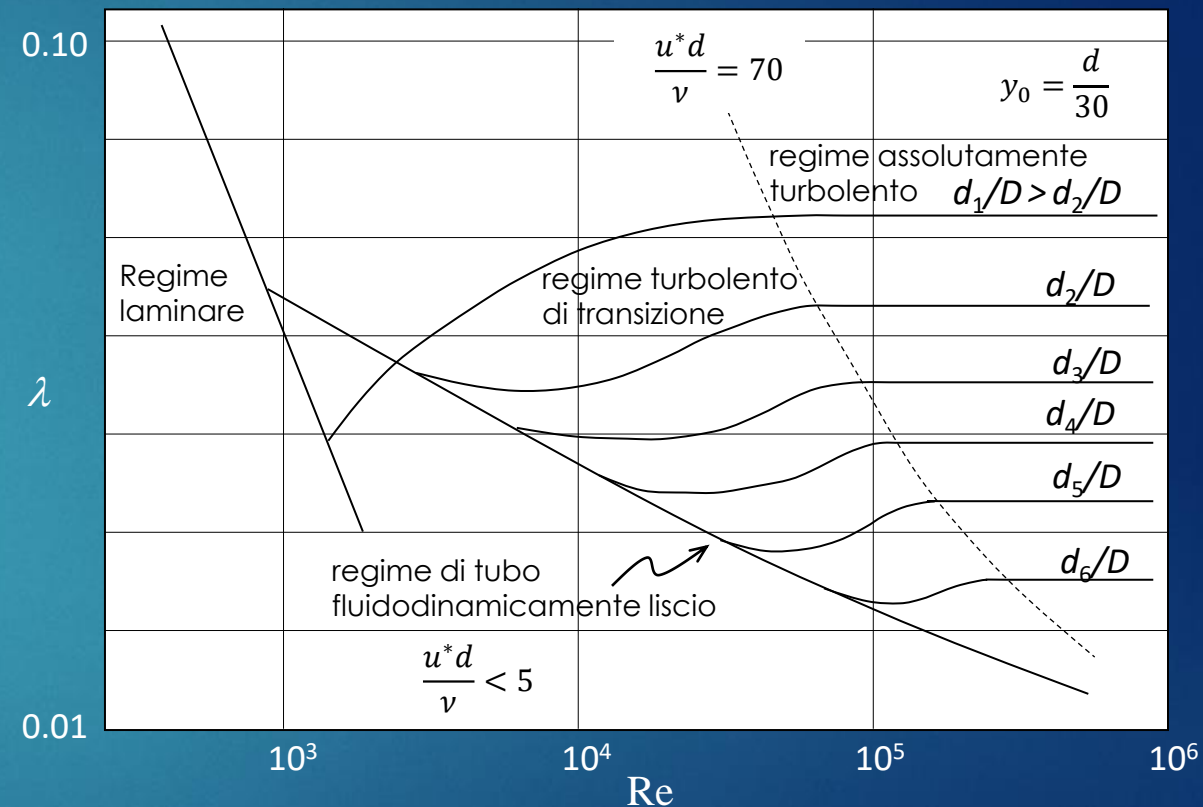
$$\lambda = \lambda(Re) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} Re} \right)$$

- Regime turbolento di transizione

$$\lambda = \lambda \left(Re, \frac{d}{D} \right)$$

- Regime assolutamente turbolento (turbolenza pienamente sviluppata)

$$\lambda = \lambda \left(\frac{d}{D} \right) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{d/D}{3,71} \right)$$



Prandtl-Von Kármán $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} Re} \right)$

Prandtl-Nikuradse $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{d/D}{3,71} \right)$

- ✓ Formule basate su profilo di velocità logaritmico

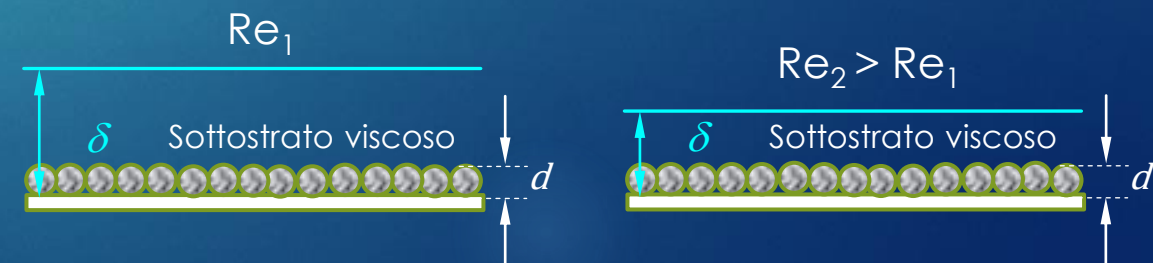
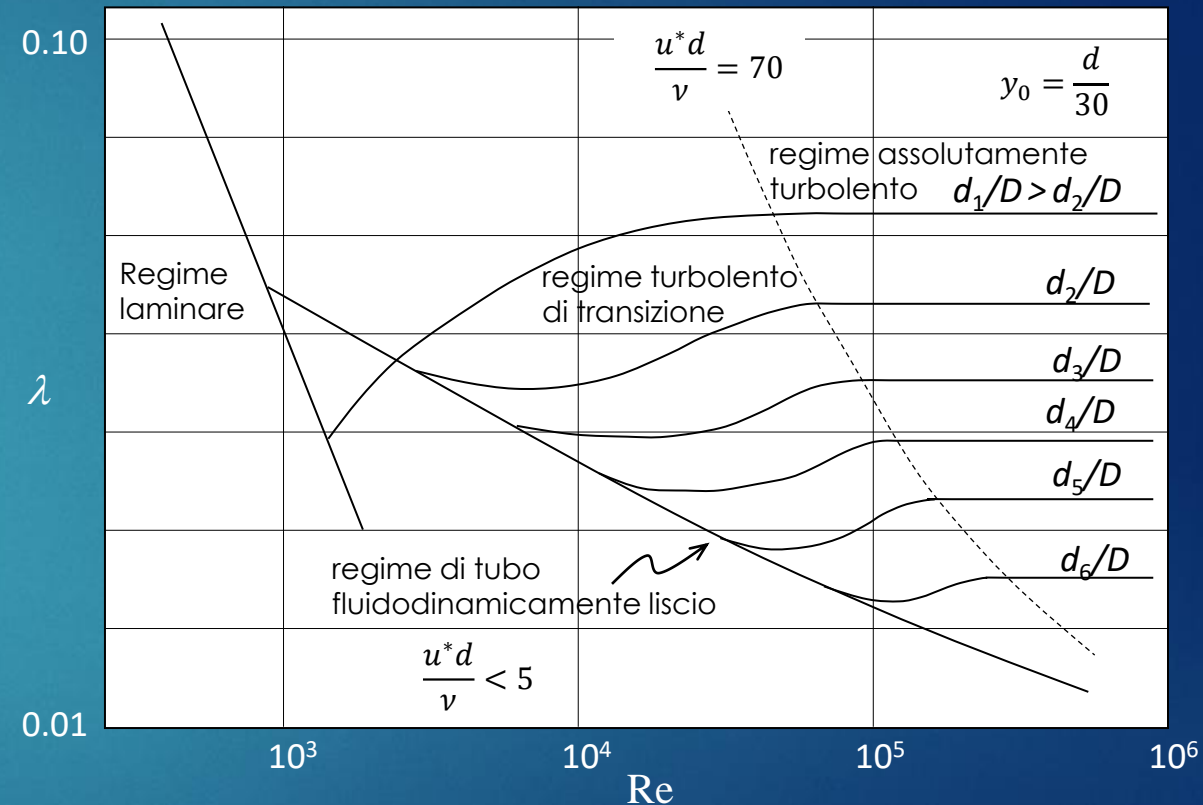
Leggi di resistenza al moto uniforme

► Esperienze di Prandtl – Nikuradse (1933)

- Prove con scabrezza omogenea: $\sigma = d$
- Risultati sperimentali in arpa di Nikuradse
- Regime di tubo fluidodinamicamente liscio

$$\lambda = \lambda(\text{Re}) \quad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} \text{Re}} \right)$$

- Tubi scabri seguono la curva dei tubi lisci fino a un certo valore del numero di Reynolds
 - Il sottostrato viscoso ricopre le asperità
 - I vortici generati dai distacchi attorno alle asperità vengono dissipati da sforzi viscosi
 - Il nucleo turbolento non viene influenzato dalla scabrezza
- Lo spessore del sottostrato viscoso δ decresce all'aumentare di Re: $\frac{u^* \delta}{\nu} = 5$ (da sviluppare...)
- Distacco da curva tubi lisci per $\delta \approx d$



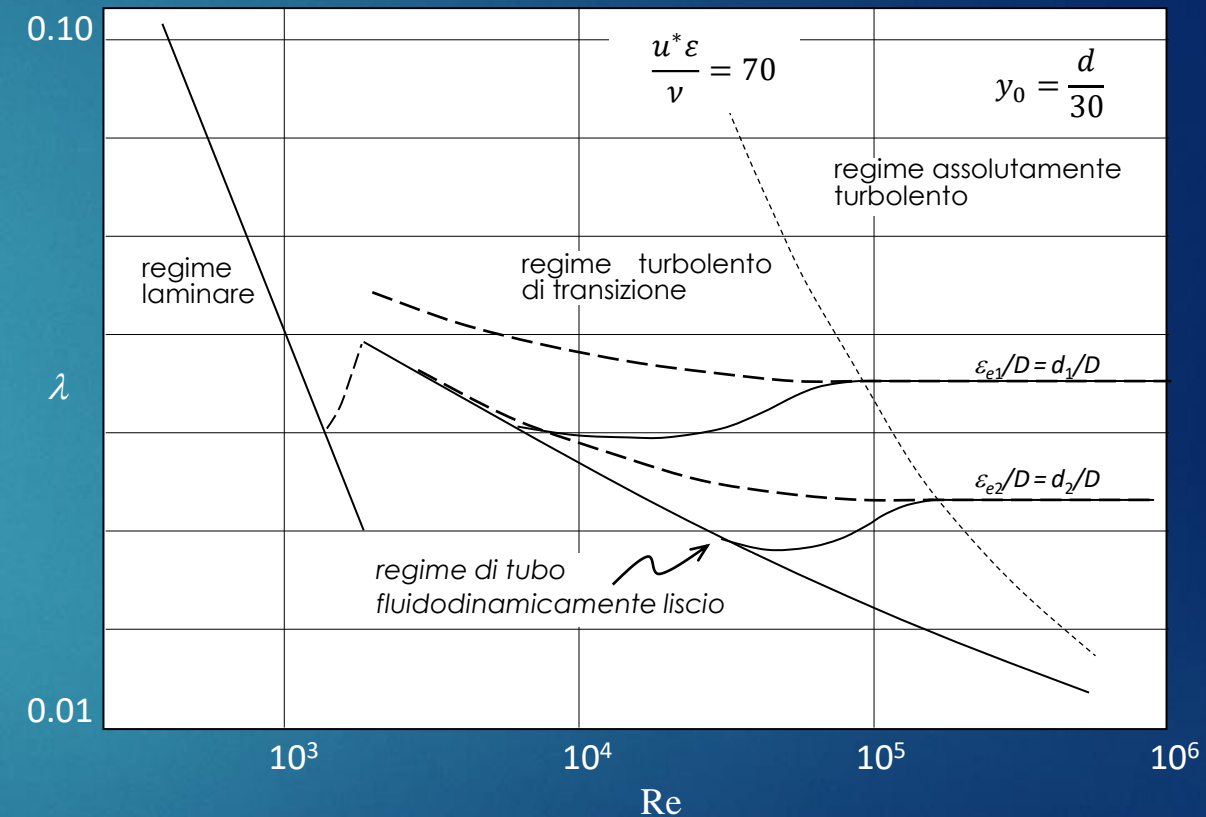


Leggi di resistenza al moto uniforme

- Tubi a scabrezza eterogenea (commerciali)
 - Regime laminare: curva identica $\lambda = 64/\text{Re}$
 - Regime turbolento
 - Curva tubi fluidodinamicamente lisci identica
- $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} \text{Re}} \right) \quad (\text{Prandtl-Von Kármán})$$
- Curve per tubi scabri monotone decrescenti
 - Presenza di regime assolutamente turbolento
 - Scabrezza eterogenea ε definita come *scabrezza omogenea equivalente*

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,71} \right) \quad (\text{Prandtl-Nikuradse})$$

- Distacco curve tubi scabri da curva tubi lisci più graduale rispetto a scabrezza omogenea
- ✓ scoperta graduale delle asperità con scabrezza eterogenea





Leggi di resistenza al moto uniforme

► Tubi a scabrezza eterogenea (commerciali)

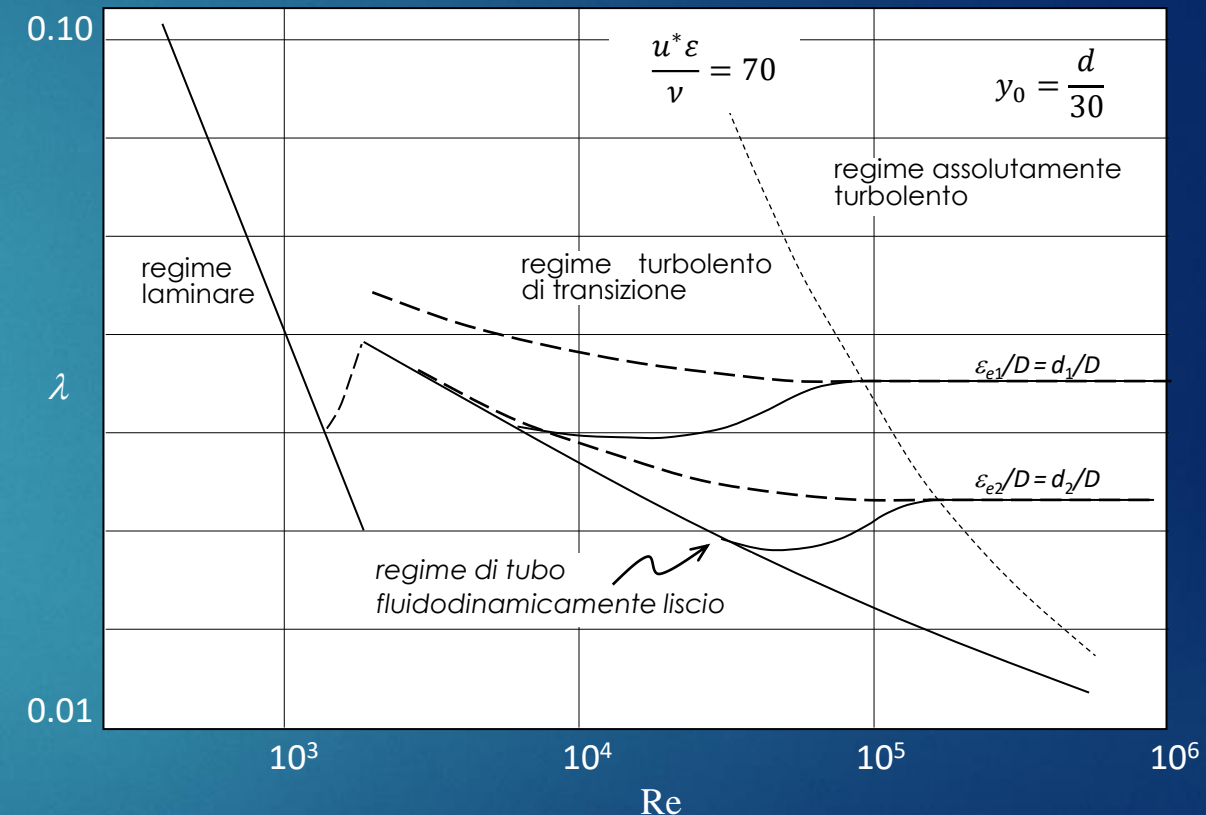
- Regime turbolento

Quale relazione analitica per tutti i regimi (tubo liscio, transizione, assolutamente turbolento) ?

- Formula di Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} \text{Re}} + \frac{\varepsilon/D}{3,71} \right)$$

- ✓ Nessun fondamento teorico per la somma degli argomenti dei logaritmi delle formule di Prandtl-Von Kármán e Prandtl-Nikuradse
- ✓ Garantita rappresentazione casi particolari:
 - $\varepsilon = 0$ \longrightarrow Prandtl-Von Kármán
 - $\text{Re} \rightarrow \infty$ \longrightarrow Prandtl-Nikuradse
- ✓ corretta rappresentazione del regime turbolento di transizione (sperimentalmente)





Leggi di resistenza al moto uniforme

► Tubi a scabrezza eterogenea (commerciali)

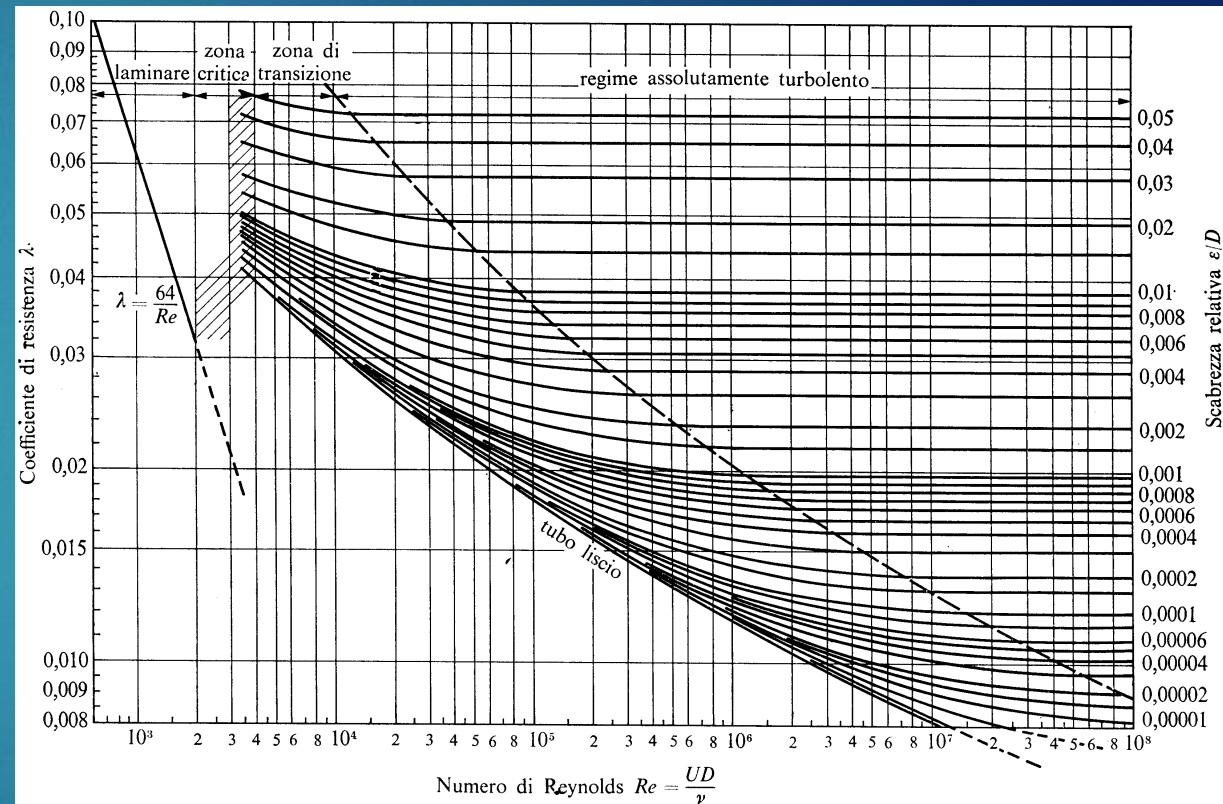
- Formula di Colebrook-White

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\sqrt{\lambda} Re} + \frac{\varepsilon/D}{3,71} \right)$$

- Abaco di Moody: plottaggio f. di Colebrook
 - Zona critica: area di dispersione dei punti sperimentali (transizione alla turbolenza)
- Uso pratico della formula di Colebrook-White
 - Equazione trascendente in λ
 - Necessaria soluzione numerica mediante procedura iterativa: posto $x = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

$$\circ \quad x_k = -2 \log \left(\frac{2,51}{Re} x_{k-1} + \frac{\varepsilon/D}{3,71} \right) \quad ; \quad x_0 = 0$$

$$\circ \quad \text{Su Excel si cerca } x + 2 \log \left(\frac{2,51}{Re} x + \frac{\varepsilon/D}{3,71} \right) = 0 \text{ con funzionalità "Ricerca Obiettivo" o "Risolutore"}$$





Leggi di resistenza al moto uniforme

► Formule pratiche

- Formula di Chezy

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} \quad \chi \text{ coefficiente di Chezy}$$

- Coefficiente di Chezy

– Formule empiriche

- Bazin $\chi = \frac{87}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\Re}}} \quad \gamma \text{ scabrezza (m}^{1/2}\text{)}$

- Kutter $\chi = \frac{100}{1 + \frac{m}{\sqrt{\Re}}} \quad m \text{ scabrezza (m}^{1/2}\text{)}$

- Gauckler-Strickler $\chi = k_s \Re^{1/6} \quad k_s \text{ scabrezza (m}^{1/3}\text{s}^{-1}\text{)}$

- Manning $\chi = \frac{1}{n} \Re^{1/6} \quad n \text{ scabrezza (m}^{-1/3}\text{s)}$

- ✓ χ non dipende da Re , validità limitata al regime assolutamente turbolento

- ✓ γ, m, n crescenti all'aumentare della rugosità della parete

- ✓ k_s decrescente all'aumentare della rugosità della parete

- Formula monomia con χ di Strickler

$$j = \frac{Q^2}{\chi^2 \Re \Omega^2} = \frac{Q^2}{k_s^2 \left(\frac{D}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{D}{4}\right) \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} = \frac{4^{10/3}}{\pi^2 k_s^2} \frac{Q^2}{D^{16/3}}$$

del tipo $j = k Q^2 D^{-n}$

- Equivalenza con indice di resistenza della formula di Darcy-Weibach

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 \Re} \quad ; \quad j = \lambda \frac{U^2}{8g\Re} \quad \longrightarrow \quad \chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

- ✓ Estensione della formula di Chezy al regime turbolento di transizione



Leggi di resistenza al moto uniforme

► Formule pratiche

- Formula di Darcy: $j = \beta \frac{Q^2}{D^5}$; $\beta = a + \frac{b}{D}$

– tubi di ghisa o acciaio nuovi

$$a = 0,00164 ; b = 0,000042$$

– Tubi vecchi: valori doppi

► Perdite di carico su un tratto di corrente a-b

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -j = -\lambda \frac{U^2}{2gD} \longrightarrow H_a - H_b = \int_a^b \lambda \frac{U^2}{2gD} ds$$

- Moto uniforme ($D=\text{cost}$, $j = \text{cost}$)

$$H_a - H_b = \int_a^b \lambda \frac{U^2}{2gD} ds = \lambda \frac{U^2}{2gD} L_{ab}$$

- Moto stazionario non uniforme ($D \neq \text{cost}$, $j \neq \text{cost}$)

$$H_a - H_b = \int_a^b \lambda \frac{U^2}{2gD} ds = \frac{8Q^2}{g\pi^2} \int_a^b \frac{\lambda(\frac{\varepsilon}{D})}{D^5} ds$$

per regime di moto assolutamente turbolento

Tipo di condotta	Scabrezza omogenea equivalente ε (mm)	Bazin γ ($\text{m}^{1/2}$)	Kutter m ($\text{m}^{1/2}$)	Gauckler-Strickler k_s ($\text{m}^{1/3}\text{s}^{-1}$)
Tubazioni tecnicamente lisce (vetro, ottone o rame trafilato, resina)	$0 \div 0,02$	–	–	–
Tubazioni in acciaio				
- tubi nuovi, verniciati per centrifugazione	0,05	–	–	120
- bitumati per immersione	$0,10 \div 0,15$	$\leq 0,06$	$\leq 0,12$	100
- in servizio corrente con leggera ruggine	$0,2 \div 0,4$	0,10	0,15	90
- con asfalto o catrame applicato a mano	$0,5 \div 0,6$	0,16	$0,20 \div 0,25$	$85 \div 80$
- con tubercolizzazione diffusa	$1,0 \div 3,0$	0,23	$0,30 \div 0,35$	$75 \div 70$
- cemento applicato per centrifugazione	$0,05 \div 0,15$	$\leq 0,06$	$\leq 0,12$	120
Tubazioni in lamiera saldata				
- in buone condizioni	$0,2 \div 0,3$	0,10	0,15	90
- in servizio corrente, con incrostazioni	$0,4 \div 1,0$	0,16	$0,20 \div 0,25$	$85 \div 75$
Tubazioni in ghisa				
- con rivestimento cementizio centrifugato	0,10	$\leq 0,06$	$\leq 0,12$	105
- nuove, rivestite internamente con bitume	0,15	0,06	0,12	100
- nuove, non rivestite	$0,2 \div 0,4$	0,10	0,15	90
- con lievi incrostazioni	$0,4 \div 1,0$	0,16	$0,20 \div 0,25$	$85 \div 75$
- in servizio corrente, parzialmente arrugginite	$1,0 \div 2,0$	0,23	0,35	$75 \div 70$
- fortemente incrostate	$3,0 \div 5,0$	0,36	0,45	65
Tubazioni in cemento				
- cemento-amianto	0,10	$\leq 0,06$	$\leq 0,12$	105
- cemento armato nuove, intonaco liscio	$0,10 \div 0,15$	0,06	0,12	100
- cemento armato con intonaco liscio, in servizio da più anni	2,0	0,23	0,35	70
- gallerie con intonaco di cemento, a seconda del grado di finitura	$2,0 \div 5,0$	$0,23 \div 0,36$	$0,30 \div 0,45$	$70 \div 65$